

ΘΕΜΑ Α

A1 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $| \eta \mu x | \leq | x |$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**.

Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{x_0} f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon f x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. βιβλίο, σελ.: 334

A2. Σχολ. βιβλίο, σελ.: 246

A3. Σχολ. βιβλίο, σελ.: 222

A4. α. $\rightarrow \Lambda$ β. $\rightarrow \Sigma$ γ. $\rightarrow \Sigma$ δ. $\rightarrow \Lambda$ ε. $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1. $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z-2| = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow |z-2| = -2$ απορρίπτεται ή $|z-2| = 1$

Άρα ο γ.τ. των z είναι κύκλος $K(2,0)$ και $\rho=1$, $|z|_{\max} = (OK) + \rho = 2+1 = 3$. Άρα $|z| \leq 3$.

B2. Οι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$. Άρα $z_2 = \bar{z}_1$. Αν $z_1 = x + yi$ είναι $\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2) = \text{Im}(z_1) - \text{Im}(\bar{z}_1) = y - (-y) = 2y$ οπότε $|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = |2y| = 2|y|$ άρα $2|y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1$ όμως $z_1 z_2 = \gamma \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = \gamma \Leftrightarrow |z_1|^2 = \gamma \Leftrightarrow x^2 + 1 = \gamma(2)$ και $z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow z_1 + \bar{z}_1 = -\beta \Leftrightarrow 2\text{Re}(z_1) = -\beta \Leftrightarrow 2x = -\beta$ (3) ακόμη, $|z-2| = 1 \Leftrightarrow |x+yi-2| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + |y|^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα η σχέση (2) $\Leftrightarrow \gamma = 5$ και η (3) $\Leftrightarrow \beta = -4$

B3. $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$. Άρα $|v^3| = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| \leq |\alpha_2| |v^2| + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0|$ ①. Όμως, από B1 ισχύει $|\alpha_2| \leq 3$, $|\alpha_1| \leq 3$, $|\alpha_0| \leq 3$, άρα από ① $\Leftrightarrow |v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |v|^2 (|v| - 3) - 3|v| + 9 \leq 12 \Leftrightarrow |v|^2 (|v| - 3) - 3(|v| - 3) \leq 12 \Leftrightarrow (|v| - 3)(|v|^2 - 3) \leq 12$. Έστω $|v| \geq 4$ τότε $|v| - 3 \geq 1$ και $|v|^2 - 3 \geq 13$. Άρα $(|v| - 3)(|v|^2 - 3) \geq 13$ άτοπο, άρα $|v| < 4$

Σχόλιο: Υπάρχει και άλλη λύση θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$, $x \geq 0$ και με μονοτονία.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$ για $x = 0$: $\frac{1}{2} = 0 + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ άρα $\frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2 + 1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1}$$

Θεωρούμε $h(x) = f(x) + x$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $\mathbb{R}$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow h^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2} = 0$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού $h(0) = f(0) = 1 > 0$ είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά από $\textcircled{1}$ $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Το $Dg = \mathbb{R}$ οπότε $D_{f \circ g} = \{x \in Dg / g(x) \in Df\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$. Η $f(g(x)) = f(0) \textcircled{4}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1}$ άρα $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Ακόμη έχουμε: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$. Επομένως $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1. Από $\textcircled{4}$ έχουμε $f(g(x)) = f(0) \stackrel{f^{-1}-1}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$. Η $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$, και $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$ όμως

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		TM		TE	
		$g(-1) = -\frac{1}{2}$		$g(0) = -1$	

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = -\infty.$$

Άρα $g(\mathbb{R}) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ όπου $\Delta_1 = g((-\infty, -1)) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ $\Delta_2 = g((-1, 0)) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ $\Delta_3 = g((0, +\infty)) = (-1, +\infty)$ άρα

$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Όμως το 0 ανήκει μόνο στο Δ_3 όπου η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f(x-\frac{\pi}{4})\epsilon\phi x$ στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Η $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

άρα η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών. Το $\varphi(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f(0) \cdot \epsilon\phi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$ όμως στο $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ η $f(x) > 0$. Άρα $\varphi(0) > 0$.

$$\text{Το } \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t)dt - f(0) \cdot \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1 < 0.$$

Οπότε $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε

$$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\epsilon\phi x_0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \frac{f(1+5h) - f(1) - [f(1-h) - f(1)]}{h}$. Έστω $1+5h = x \Leftrightarrow h = \frac{x-1}{5}$. Όταν $h \rightarrow 0$ τότε $x \rightarrow 1$. Τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\frac{x-1}{5}} = 5 \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 5f'(1).$$

Έστω $1-h = u \Leftrightarrow h = 1-u$ όταν $h \rightarrow 0$ το $u \rightarrow 1$. Τότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(1)}{-(u-1)} = -f'(1)$.

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1). \text{ Άρα } 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για κάθε $x > 1$ η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Ομοίως για $x < 1$ ισχύει $f'(x) < 0$.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$.

Δ2. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής άρα η $\frac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1, +\infty)$.

$$\text{Επομένως η } g \text{ παραγωγίσιμη στο } (1, +\infty) \text{ με } g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Έστω

$$G(x) = \int_x^{x+1} g(u) du. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } (1, +\infty) \text{ άρα η } G \text{ είναι παραγωγίσιμη με } G'(x) = g(x+1) - g(x).$$

$x+1 > x \Leftrightarrow g(x+1) > g(x) \Leftrightarrow G'(x) > 0$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Τα όρια ολοκλήρωσης ανήκουν στο διάστημα $(1, +\infty)$ οπότε, αφού η G είναι 1-1, η σύνθεση της G με κάθε όριο ολοκλήρωσης ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Επομένως, } \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow G(8x^2+5) > G(2x^4+5) \Leftrightarrow 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4-8x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Δ3. Έχουμε $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$. Για κάθε $x > 1$ η g' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2} \text{ Η } f \text{ παραγωγίζεται στο } [1, x], \text{ } x > 1 \text{ από ΘΜΤ υπάρχει } x_0 \in (1, x) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow (x-1)f'(x_0) = f(x) - 1. \text{ Τότε, } g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(x_0)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-1} \text{ όμως}$$

$x_0 < x \Leftrightarrow f'(x_0) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(x_0) > 0$ και $x-1 > 0$ άρα $g''(x) > 0$ επομένως, η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Έστω ε η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = a$.

$$(\varepsilon): y = g'(a)(x-a) + g(a) \Leftrightarrow y = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a). \text{ Όμως η } g \text{ είναι κυρτή και η } \varepsilon \text{ είναι η εφαπτομένη της στο } x_0 = a \text{ άρα}$$

$$g(x) \geq \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt \geq \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow (a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt \geq (f(a)-1)(x-a). \text{ Η τελευταία σχέση ισχύει}$$

ως ισότητα μόνο για $x = a$ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την $x = a$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ